Análisis Funcional – Evaluación 3

1. Sea X un espacio normado, Y un espacio de Banach y $A \subset X$ verificando que $\overline{\mathrm{Lin}}(A) = X$. Sea $\{T_n\}$ una sucesión de operadores en $L(X,Y)$ verificando que $\{T_n x\}$ es una sucesión de Cauchy para todo $x \in A$, y existe $M > 0$ tal que $\|T_n\| \leqslant M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Prueba que $\{T_n\}$ es puntualmente convergente, y que definiendo para todo $x \in X$, $Tx = \lim \{T_n x\}$, se verifica que $T \in L(X,Y)$.

2. Dada una sucesión acotada $a \in \ell_\infty$, se define el funcional $\varphi : \ell_1 \to \mathbb{K}$ por

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)x(n) \quad (x \in \ell_1)$$

   Indica una condición que debe cumplir la sucesión $a \in \ell_\infty$ para que φ alcance su norma.

3. Dada una sucesión acotada, $a \in \ell_\infty$, se define un operador lineal $T : \ell_p \to \ell_p$, donde $1 \leqslant p \leqslant \infty$, por

$$[Tx](n) = a(n)x(n) \quad (x \in \ell_p, n \in \mathbb{N})$$

   a) Estudia la continuidad de T y calcula su norma. ¿Hay algún valor de p para el que pueda asegurarse que T alcanza su norma?

   b) Prueba que T es un isomorfismo topológico si, y sólo si, existe un número $r > 0$ tal que $|a(n)| \geqslant r$ para todo $n \in \mathbb{N}$.